Integrales inmediatas

Son aquellas que se pueden resolver inmediatamente, suceden cuando: tenemos la derivada de una función sin tener que ajustar ni compensar con coeficientes: $\int F'(x)\,dx = F(x)$. $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$.

También podemos tener que ajustar coeficientes: $\int -3x^4\,dx = -\frac{3}{5}x^5 + C$

$$\int 6e^{2x}\,dx = 3e^{2x} + C$$

Los pasos son: $\int -3x^4\,dx$ y $\int 6e^{2x}\,dx$

① Sacar fuera de la integral los coeficientes: $-3\int x^4\,dx$

② Ajustar con un coeficiente con el que conseguiríamos la derivada:

$$-3\int \frac{5}{5}x^4\,dx$$

Me faltaría un 5

(*) Multiplicamos y dividimos por lo mismo, para no efectuar cambios.

$$6\int \frac{2}{2}e^{2x}\,dx$$

Me faltaría un 2

③ Sacar fuera de la integral lo que no forme parte de la integral inmediata:

$$-\frac{3}{5}\int 5x^4\,dx = -\frac{3}{5}x^5 + C$$

¡Inmediata!

$$\frac{6}{2}\int 2e^{2x}\,dx = 3e^{2x} + C$$

¡Inmediata!

Integrales trigonométricas

Las funciones seno, coseno y tangente las resolveremos como las anteriores.

No obstante, las integrales de funciones "arco", las identificaremos de la siguiente forma:

TABLA DE DERIVADAS

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-f^2(x)}}\cdot f'(x) = \text{arcsen}\, f(x) + C \;\longrightarrow\; \int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{dx}{1+f^2(x)}\cdot f'(x) = \text{arctg}\, f(x) + C \;\longrightarrow\; \int \frac{6x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)}\,dx =$$

$$\int \frac{dx}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}} = \text{arcsec}[f(x)] + C \;\longrightarrow\; \int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}}$$

Las identificamos cuando tenemos:

1) Raíces en el denominador con $\sqrt{1-\square^2}$ / $\sqrt{\square^2-1}$

2) $\square^2 + 1$

Compensamos y ajustamos:

Derivada de $\square$ sin el cuadrado.

$[2x]^2 \to (2x)' = 2$

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = 3\int \frac{\frac{2}{2}}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{3}{2}\,\text{arcsen}(2x) + C$$

$[\ln(x^2+1)]^2 \to (\ln(x^2+1))' = \frac{2x}{x^2+1}$

$$\int \frac{6x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)}\,dx = 6\int \frac{\frac{2}{2}x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)}\,dx = \frac{6}{2}\int \frac{2x}{(1+\ln^2(x^2+1))(x^2+1)}\,dx =$$

$$= 3\,\text{arctg}(\ln(x^2+1)) + C$$

$[2x]^2$

$$\int \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}} = \text{arcsec}\, 2x + C$$

Integrales racionales

Tipo 1: cuando en el denominador hay un único monomio y en el denominador sumandos. Separaremos sumandos y resolvemos por separado.

$$\int \frac{x^2+3x+4}{x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{x^2}dx + \int \frac{4}{x^3}dx = Ln|x| - 3x^{-1} - 2x^{-2} + C$$

($Ln x$ ↑, $3\cdot x^{-2}$ ↑, $4\cdot x^{-3}$ ↑)

Tipo 2: el denominador es un polinomio de grado n y el numerador es un polinomio de grado n−1, y puede encajar con la derivada del denominador estaremos ante logaritmos neperianos.

$$\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x-1}\,dx$$

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx$$

① Hallamos la derivada del denominador:

$3x^2+2 \longrightarrow$ Si $3x^2+2 \cdot 2 = 6x^2+4$ ✓

$2x \longrightarrow$ Si $2x \cdot \frac{3}{2} = 3x$ ✓

② Sacamos de la integral el coeficiente que "sobra".

$$2\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x-1}\,dx = 2\cdot Ln|x^3+2x-1| + C$$

(derivada den.) ¡Inmediata! — Ln lo pondremos con valor absoluto

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\,Ln|x^2+1|$$

Tipo 3: cuando el numerador es de mayor grado que el denominador. Simplemente haremos la división de polinomios y lo expresaremos así:

$$\frac{D}{d} = \frac{d\cdot c + r}{d} = \frac{\cancel{d}\cdot c}{\cancel{d}} + \frac{r}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ejemplo numérico:

$$\frac{49}{3} = \frac{3\cdot 16 + 1}{3} = \frac{3\cdot 16}{3} + \frac{1}{3} = 16 + \frac{1}{3}$$

Después, resolveremos:

$$\int \frac{3x^2-5x+1}{2x+1}\,dx =$$

División:

$3x^2-5x+1 \;|\; 2x+1$

$-3x^2-\frac{3}{2}x \qquad$ cociente: $\frac{3}{2}x - \frac{13}{4}$

$\quad -\frac{13}{2}x+1$

Vamos $\cdot(-1)$: $\frac{13}{2}x + \frac{13}{4}$

$\quad \frac{17}{4}$

$$\int \frac{(2x+1)\left(\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\right)+\frac{17}{4}}{(2x+1)}\,dx =$$

$$\int \left(\frac{\cancel{(2x+1)}\left(\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\right)}{\cancel{(2x+1)}} + \frac{\frac{17}{4}}{2x+1}\right)dx =$$

$$\int \left(\frac{3}{2}x-\frac{13}{4} + \frac{\frac{17}{4}}{2x+1}\right)dx$$

Y resolvemos por separado.

$$\int \left(\frac{3}{2}x-\frac{13}{4} + \frac{\frac{17}{4}}{2x+1}\right)dx = \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{17}{8}Ln|2x+1| + C$$

$$\frac{3}{2}\int x\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 \qquad \frac{13}{4}\int 1\,dx = \frac{13}{4}x$$

$$\frac{17}{4}\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{17}{4}\int \frac{\frac{2}{2}}{2x+1}\,dx = \frac{17}{8}\int \frac{2}{2x+1}\,dx = \frac{17}{8}Ln|2x+1|$$

$Ln\square \longrightarrow \square' = 2$